1. ESPONENZIALE DI UNA MATRICE

Lo spazio vettoriale $M_n(K)$, con $K = R, C$, é uno spazio normato, quando si definisce per ogni matrice $A = (a_{ij})$, la norma $||A||$ di A nel seguente modo:

$$(1.1) \qquad ||A|| = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \{|a_{ij}|\} \qquad |a_{ij}| = \text{modulo di } a_{ij}$$

Si ha quindi uno spazio di Banach e per la norma vale la seguente disuguaglianza

$$(1.2) \qquad ||A \cdot B|| \leq n||A|| \cdot ||B||$$

Infatti l'elemento c_{ij} del prodotto $A \cdot B = C$ é dato da

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Pertanto

$$||A \cdot B|| = ||C|| = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \{c_{ij}\} = \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \right\} \leq$$

$$\leq \max_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| \right\} \leq n||A|| \cdot ||B||$$

Proposizione (1.3) *Nello spazio di Banach delle matrici $M_n(K)$, la seguente serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

é convergente, per ogni matrice $A \in M_n(K)$

Dimostrazione.

Dalla (1.2) segue che per ogni $k \in N$

$$||A^k|| \leq n^{k-1} ||A||^k \leq (n||A||)^k$$

Per provare che la serie assegnata converge, basta provare che converge la corrispondente serie delle norme, cioé la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||A||^k$$

ed infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||A||^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (n||A||)^k = e^{n||A||}$$

Definizione (1.4) *Per ogni matrice $A \in M_n(K)$ si chiama esponenziale di A e si indica con $\exp(A)$ la matrice*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in M_n(K)$$

Tale definizione ha senso in virtú della proposizione (1.3)

ESERCIZI (1.5)

(a) Calcolare $\exp(J_{0,n})$, dove $J_{0,n}$ é un blocco di Jordan relativo all'autovalore 0 e di ordine n.

(b) Provare che se A é una matrice diagonale a blocchi del tipo $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ risulta

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & 0 \\ 0 & \exp(A_2) \end{pmatrix}$$

Facendo uso di ció e di quanto ottenuto in (a) provare che se J_0 é una matrice diagonale a blocchi di Jordan ed é nilpotente, allora $\exp(J_0)$ é una matrice triangolare superiore unipotente.

(c) Sia

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \beta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \beta \end{pmatrix}$$

una matrice diagonale provare che $\exp(A)$ é ancora diagonale e che risulta

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & e^{\alpha} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & e^{\beta} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^{\beta} \end{pmatrix}$$

(d) Siano A e $B \in M_n(K)$ tali che $A = C^{-1}BC$. Provare che si ha:

$$\exp(A) = C^{-1}\exp(B)C$$

(Suggerimento: si ricordi che dire che una serie converge, per definizione, vuol dire che converge la successione delle ridotte parziali)

Lo studente si sará accorto che la definizione (1.4) di esponenziale di una matrice é stata formalmente presa dalla definizione dell'applicazione esponenziale su R, cioé la funzione

$$\exp : R \to R \qquad \text{dove} \quad \forall x \in R, \quad \exp(x) = e^x.$$

Abbiamo di fatto preso la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = e^x$$

ed abbiamo sostituito ad $x \in R$ (matrice di $M_1(R)$) una qualunque matrice $A \in M_n(K)$.

Le proprietá che seguono vogliono mettere in evidenza le differenze che si ottengono nel passaggio all'applicazione

$$\begin{aligned} \exp :& M_n(K) \to M_n(K) \\ & A \to \exp(A) \end{aligned}$$

Proprietá (1.6)
(a) Se $A, B \in M_n(K)$ e $AB = BA$ allora $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$
(b) Per ogni matrice $A \in M_n(K)$, $\exp(A) \in GL_n(K)$

Prima di procedere nella dimostazione di (a) e (b), osserviamo che (a) dice che la proprietá sempre vera sui reali $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, é vera sulle matrici solo nel caso che esse commutino.

La parte (b) precisa che l'applicazione $\exp : M_n(K) \to M_n(K)$ non é suriettiva, e di fatto, exp é un'applicazione

$$\exp : M_n(K) \to GL_n(K) \tag{1.7}$$

Di fatto si puó provare che in questo modo si ottiene un'applicazione suriettiva, in quanto vale la seguente:

Proposizione (1.8) *Per ogni matrice $X \in GL_n(K)$ esiste una matrice $Y \in M_n(K)$ tale che:*

$$X = \exp(Y)$$

La dimostrazione di ció si vedrá in segito. Veniamo alla dimostrazione delle proprietá (1.6)

Dimostrazione.

Per quanto riguarda (a), sappiamo che le seguenti serie convergono e:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i = \exp(A) \qquad\qquad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j = \exp(B)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \exp(A+B)$$

D'altra parte la commutativitá delle matrici A e B implica che

$$(A+B)^k = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} \binom{k}{i} A^i B^j$$

Poiché le prime due serie convergono, converge anche il loro prodotto e si puó scrivere

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) =$$

$$\overset{\text{somma per}}{\underset{\text{diagonali}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} \frac{k!}{i!j!} A^i B^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \exp(A+B)$$

Per quanto concerne (b), si ha che per ogni matrice A, risulta $A = C^{-1}JC$ dove J é una matrice a blocchi di Jordan. Per l'esercizio (1.5)(d) risulta

$$\exp(A) = C^{-1} \exp(J) C$$

e quindi $\exp(A)$ é invertibile se e solo se $\exp(J)$ é tale (il determinante é un invariante per coniugazione). Decomponiamo J nella sua parte semisemplice ed in quella nilpotente (cfr. definizione (2.1) e proposizione

(2.3)); si avrá $J = \Lambda + J_0$, dove Λ é diagonale, J_0 é nilpotente e a blocchi di Jordan e Λ e J_0 commutano. Dalla (a) segue che

$$\exp(J) = \exp(\Lambda) \cdot \exp(J_0)$$

dove $\exp(\Lambda)$ é la matrice diagonale con elementi gli esponenziali degli elementi sulla diagonale di Λ, e quindi é invertibile, $\exp(J_0)$ é una matrice triangolare superiore unipotente e la tesi é dunque provata.

ESERCIZI (1.9)

(1) Provare che per ogni matrice $A \in M_n(K)$ risulta

$$\det(\exp(A)) = e^{tr(A)}$$

(2) Calcolare l'esponenziale delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Riprendiamo l'applicazione (1.7)

$$\exp : M_n(K) \to GL_n(K) \qquad\qquad K = R, C$$

e teniamo conto che $M_n(K)$ é uno spazio metrico e quindi uno spazio topologico, di fatto é K^{n^2}. Analogamente $GL_n(K)$ é uno spazio topologico con la topologia indotta da quella di K^{n^2}.

Proposizione (1.10) *L'applicazione* $\exp : M_n(K) \to GL_n(K)$ *é un'applicazione continua.*

Dimostrazione

Prima di provare quanto affermato osserviamo che se A e B sono due matrici qualunque di $M_n(K)$, che quindi in generale non commutano, per la potenza m-esima di $(A + B)$ risulta:

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=k \\ j_1+\cdots+j_s=m-k}} A^{i_1}B^{j_1}A^{i_2}B^{j_2}\cdots A^{i_s}B^{j_s} \right)$$

In tale espansione vi sono 2^m termini, tanti quanti i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, 2, \ldots, m\}$. Inoltre la sommatoria

$$\sum_{i_1+\cdots+i_s=k} A^{i_1}B^{j_1}\cdots A^{i_s}B^{j_s}$$

contiene $\binom{m}{k}$ addendi in quanto si tratta di scegliere k posti sugli m dati, da riempire con il fattore A (gli altri sono univocamente riempiti dal fattore B). Sia $A_0 \in M_n(K)$, per provare che exp é continua in A_0, scelto un $\varepsilon > 0$ reale, si deve determinare un numero δ_ε tale che non appena $X \in M_n(K)$ é tale che $||X - A_0|| < \delta_\varepsilon$ risulti

$$|| \exp(X) - \exp(A_0)|| < \varepsilon.$$

Posto $X = B + A_0$, dobbiamo determinare δ_ε in modo che non appena

$$||B|| = ||B + A_0 - A_0|| < \delta_\varepsilon$$

risulti

$$|| \exp(A_0 + B) - \exp(A_0)|| < \varepsilon$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\exp(A_0+B)-\exp(A_0) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(A_0+B)^m-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}{A_0}^m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big[(A_0+B)^m-A_0^m\Big] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=k\\ j_1+\cdots+j_s=m-k\\ i_1\neq m}} A_0^{i_1}B^{j_1}\cdots A_0^{i_s}B^{j_s}\end{aligned}$$

Ma stimando la seguente norma si ottiene:

$$||A_0^{i_1}B^{j_1}\cdots A_0^{i_s}B^{j_s}||\leq n^{m-1}||A_0||^k||B||^{m-k} \qquad \text{con} \qquad m-k\geq 1$$

Posto $||A_0||<c$ e scelto $c>1$ risulta

$$||A_0^{i_1}B^{j_1}\cdots A_0 i_s B j_s||\leq n^{m-1}c^k\delta^{m-k}$$

Il delta da determinare lo scegliamo tale che $\delta<c$

$$||A_0^{i_1}B^{j_1}\cdots A_0^{i_s}B^{j_s}||\leq \delta n^{m-1}c^{m-1}<\delta n^m c^m$$

In definitiva si ha

$$\begin{aligned}||\exp(A_0+B)-\exp(A_0)|| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m!}2^m\delta n^m c^m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\delta\frac{(2cn)^m}{m!} = \\ &= \delta e^{2cn}<\varepsilon\end{aligned}$$

Da cui basta assumere $\delta<\frac{\varepsilon}{e^{2cn}}$

2. CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI JORDAN SULLE MATRICI

Definizione (2.1) *Una matrice $A\in M_n(K)$, $K=R,C$ si dice semisemplice se é coniugata ad una matrice diagonale.*

In altri termini le matrici semisemplici sono tutte e sole le matrici diagonalizzabili.

ESERCIZI (2.2)

(a) Siano A e $B\in M_n(K)$ due matrici semisemplici che commutano. Provare che $A-B$ é semisemplice.

(b) Siano A e $B\in M_n(K)$ due matrici nilpotenti che commutano. Provare che $A-B$ é nilpotente.

(c) Sia J una matrice diagonale a blocchi, contentente solo blocchi di Jordan, e J di ordine n. Scrivere J come somma di una matrice diagonale Λ e di una matrice niplotente J_0 con lo stesso tipo di blocchi di Jordan di J. Verificare che Λ e J_0 commutano.

(d) Provare che se A é sia semisemplice che nilpotente allora A é la matrice nulla.

Proposizione (2.3) *Per ogni matrice $A\in M_n(K)$ esiste una matrice semisemplice A_s ed una matrice nilpotente A_n tali che:*

$$A=A_s+A_n \qquad \text{e} \qquad A_sA_n=A_nA_s$$

Dimostrazione

Sappiamo dal teorema di Jordan che esiste una matrice invertibile C tale che $A = C^{-1}JC$ dove J é una matrice a blocchi di Jordan. Per l'esercizio (2.2)(c) abbiamo che

$$J = \Lambda + J_0 \qquad \text{e} \qquad \Lambda J_0 = J_0 \Lambda$$

Dove Λ é semisemplice e J_0 é nilpotente. Pertanto risulta

$$A = C^{-1}(\Lambda + J_0)C = C^{-1}\Lambda C + C^{-1}J_0 C = A_s + A_n$$

dove si é posto

$$A_s = C^{-1}\Lambda C \qquad \text{e} \qquad A_n = C^{-1}J_0 C$$

Le matrici A_s e A_n commutano, infatti

$$\begin{aligned} A_s A_n &= C^{-1}\Lambda C C^{-1} J_0 C = C^{-1}\Lambda J_0 C = \\ &= C^{-1} J_0 \Lambda C = C^{-1} J_0 C C^{-1} \Lambda C = A_n A_s \end{aligned}$$

ESERCIZIO (2.4)

Sia A_s la matice costruita nella dimostrazione della proposizione (2.3). Provare che esiste un polinomio

$$q(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m \qquad \text{tale che} \qquad q(A) = A_s$$

<u>*Soluzione.*</u> Indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ gli autovalori distinti di A e con $\nu_1, \ldots, \nu_h$ le rispettive molteplicitá. Nella forma cononica J di Jordan di A indichiamo con $J_1, \ldots, J_h$ le matrici a blocchi di Jordan relative rispettivamente al solo autovalore $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$. Il polinomio caratteristico di J_i (con $i = 1, \ldots, h$) é dato da $p_i(x) = \det(J_i - xI) = (\lambda_i - x)^{\nu_i}$ ed ovviamente risulta

$$p_i(J_i) = \det(J_i - J_i) = 0 = (\lambda_i - J_i)^{\nu_i}$$

Per costruire il polinomio $q(x)$ facciamo uso del seguente **Teorema cinese dei resti** *Dati comunque $p_1(x), \ldots, p_s(x)$ e le costanti $c_1, \ldots, c_s$ esiste un polinomio $q(x)$ tale che $q(x) - c_i$ é divisibile per $p_i(x)$ (con $i = 1, \ldots, s$).*

Scegliamo quindi i polinomi:

$$p_1(x) = (\lambda_1 - x)^{\nu_1} \quad , \ldots, \quad p_h(x) = (\lambda_h - x)^{\nu_h} \quad , \quad p_{h+1}(x) = x$$

e le corrispondenti costanti $c_1 = \lambda_1, \ldots, c_h = \lambda_h, c_{h+1} = 0$. Il polinomio $q(x)$, dato dal teorema citato, verifica le condizioni

$$\begin{gathered} q(x) - \lambda_1 = (\lambda_1 - x)^{\nu_1} f_1(x) \\ \cdots \\ q(x) - \lambda_h = (\lambda_h - x)^{\nu_h} f_h(x) \\ q(x) = x f_{h+1}(x) \end{gathered}$$

Pertanto $q(x)$ é privo di termine noto. Sostituendo nell'i-esima relazione $x = J_i$ si ha

$$q(J_i) - \lambda_i I = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q(J_i) = \lambda_i I$$

Questo dice che il polinomio $q(x)$, valutato nella matrice J_i dá come risultato la matrice scalare $\lambda_i I$ che é la parte semisemplice (diagonale) di J_i. Tenuto conto che la matrice J é diagonale a blocchi $J_1, \ldots, J_h$ e del modo in cui si moltiplicano le matrici a blocchi, risulta anche

$$q(J) = \Lambda \qquad (\Lambda \text{ parte semisemplice di } J).$$

Poiché J ed A sono coniugate, risulta
$$A = C^{-1}JC$$
inoltre
$$C^{-1}q(J)C = q(C^{-1}JC) = q(A) = C^{-1}\Lambda C = A_s$$
e la tesi é dimostrata. Osserviamo inoltre che poiché $A = A_s + A_n$, dalla proprietá ora vista segue che
$$A_n = A - A_s = A - q(a)$$
e quindi il polinomio $r(x) = x - q(x)$ é tale che $A_n = r(A)$, con $r(x)$ sempre privo di termine noto.

Teorema (2.5) *Sia $A \in M_n(K)$, esiste un unico modo di decomporre A nella somma di una matrice semisemplice e di una nilpotente che commutino fra di loro.*

Dimostrazione

Siano A_s ed A_n come nella dimostrazione della proposizione (2.3) e supponiamo che esistano A_s' semisemplice, A_n' nilpotente tali che
$$A = A_s' + A_n' = A_s + A_n \qquad \text{e} \qquad A_s'A_n' = A_n'A_s'$$
Vogliamo prvare che $A_s = A_s'$ ed $A_n = A_n'$. Da $A = A_s' + A_n'$ si vede che A_s' commuta con A. Poiché per l'esercizio (2.4) $A_s = q(A) \Longrightarrow A_s'$ commuta con A_s e per l'esercizio (2.2)(a) $A_s - A_s'$ é semisemplice. Poiché (cfr. esercizio (2.4)) $A_n = A - q(A)$ ed A_n' commuta con $A \Longrightarrow A_n'$ commuta con A_n e quindi $A_n' - A_n$ é nilpotente (cfr. esercizio (1.2)(b)). Dall'uguaglianza $A_s' - A_s = A_n - A_n' = H$ segue che H é simultaneamente semisemplice e nilpotente, dunque $H = 0$ (cfr. esercizio (2.2)(d)) e la tesi é provata.

APPENDICE AL PARAGRAFO 1

Definizione *Uno spazio vettoriale V sul campo K si dice <u>normato</u> se esiste un'applicazione $||\cdot|| : V \to K$ tale che:*
$$||x|| \geq 0 \qquad \forall x \in V$$
$$||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$
$$||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \qquad \forall x \in V,\ \forall \lambda \in K$$
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y \in V$$
La norma su uno spazio vettoriale induce una distanza definita da $d(x, y) = ||x - y||$. Uno spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy risulta essere convergente. In particolare uno spazio vettoriale normato e completo é uno spazio di Banach.

Teorema *Sia $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ una serie a valori in uno spazio di Banach; se la serie delle norme*
$$\sum_{k=0}^{\infty} ||x_k||$$
converge, allora converge anche la serie di partenza.